

**О. Н. ПЕТРИЩЕВ** докт. техн. наук, проф., НТУУ «КПИ», Киев;  
**М. И. РОМАНЮК**, аспирант НТУУ «КПИ», Киев;  
**Г. М. СУЧКОВ** докт. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ», Харьков

## **ВОЗБУЖДЕНИЕ РАДИАЛЬНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН ЛЭМБА НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ ПЛАСТИНЫ**

С помощью интегральных преобразований Ханкеля решена задача о возбуждении волн Лэмба системой внешних нагрузок, которые существуют в объеме и на поверхности ограниченной области бесконечной пластины.

За допомогою інтегральних перетворень Ханкеля вирішена задача про збудження хвиль Лемба системою зовнішніх навантажень, які існують в об'ємі і на поверхні обмеженої області нескінченної пластини.

With the help of the Hankel integral transforms the problem of Lamb waves excitation by system of external loads that exist in the volume and surface bounded area by an infinite plate was solved. Reliability of the solutions was proven.

**Введение.** Исследование закономерностей процесса возбуждения радиально распространяющихся волн Лэмба мотивируется достаточно широким кругом обстоятельств.

Во-первых, это проблема эффективной генерации волн Лэмба с наперед обусловленными характеристиками в заданном диапазоне частот. Позитивное решение этой проблемы является необходимым и достаточным условием для существенного повышения уровня достоверности и надежности результатов ультразвуковых дефектологических исследований листового металлопроката. Помимо этого появляются предпосылки для рационального конструирования ультразвуковых преобразователей, которые обладают необходимой эффективностью в режиме излучения и чувствительностью в режиме приема упругих волн.

Во-вторых, понимание закономерностей возбуждения волн Лэмба внешними силами, распределенными в некотором объеме пластины, дает возможность адекватно интерпретировать результаты мониторинга шумов акустической эмиссии и регистрации отраженных от различного рода структурных неоднородностей ультразвуковых сигналов.

В-третьих, понимание качественных и количественных характеристик процесса возбуждения волн Лэмба формируют теоретическую основу алгоритмов обработки результатов экспериментальных исследований физико-механических параметров материалов с помощью ультразвуковых методов неразрушающего контроля.

Изучение закономерностей процесса возбуждения волн Лэмба создает предпосылки для решения весьма актуальной в ультразвуковой технике

проблемы влияния измерительного прибора, т. е. ультразвукового тракта, на параметры регистрируемых сигналов, т. е. на результаты измерений.

Благодаря успехам разработчиков электронных приборов (корпорация International Rectifier (США) серийно выпускает биполярные транзисторы с изолированным затвором (IGBT – транзисторы), которые способны коммутировать токи до 5000 ампер с частотой переключения до 300 кГц), в последнее время существенно возрос интерес к бесконтактному (электромагнитному) способу возбуждения и приема ультразвуковых волн в металлах [1]. Электромагнитный способ возбуждения упругих волн используется в ультразвуковых приборах неразрушающего контроля металлических изделий [2 – 5] и неразрушающих испытаний материалов [6, 7], в ультразвуковых магнитоотрицательных волноводных линиях задержки [8], в лабораторных установках для выполнения экспериментальных исследований закономерностей распространения упругих волн в твердых телах (см., например, фундаментальную статью Дж. Земанека [9]).

В работах [10 – 11] показано, что характеристики ультразвуковых гармонических волн, которые существуют за пределами области нагружения и которые возбуждаются контактным или бесконтактным (электромагнитным) способом, могут быть получены в результате решения следующей неоднородной граничной задачи, которая в терминах амплитуд гармонически изменяющихся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  характеристик физических полей записывается в следующем виде:

$$(\lambda + 2G)\text{grad div } \vec{u} - G\text{rot rot } \vec{u} + \rho_0\omega^2\vec{u} - f^* = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (1)$$

$$n_i(2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - \sigma_{ij}^*) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $G$  – константы Ламе;  $\vec{u}$  – вектор смещения материальных частиц;  $\rho_0$  – плотность металла;  $\omega$  – частота смены знака внешних нагрузок  $f^*$  и  $\sigma_{ij}^*$ ;  $n_i$  –  $i$ -ый компонент вектора внешней нормали к поверхности  $S$ , которая ограничивает исследуемый объем  $V$  металлического образца;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора бесконечно малых деформаций, причем  $\varepsilon_{kk}$  – линейный инвариант тензора деформаций;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. В качестве объемных нагрузок выступают либо силы Лоренца, либо (в случае ферромагнитных металлов) линейные комбинации градиентов вектора напряженности переменного магнитного поля, которое создается сторонними токами. Поверхностные плотности внешних сил формируются компонентами тензора Максвелла [12] или, в случае ферромагнетиков, компонентами вектора напряженности переменного магнитного поля. Общее решение граничной задачи (1) – (2) при  $f^* = 0$  и  $\sigma_{ij}^* \neq 0$  будет, очевидно, моделировать контактный способ возбуждения ультразвуковых волн.

Таким образом, граничная задача (1) – (2) является универсальной математической моделью процесса возбуждения ультразвуковых волн внешними силами, которые изменяются во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ . В настоящей статье излагается методика и результаты решения этой задачи.

**Возбуждение радиально распространяющихся волн Лэмба системой объемных и поверхностных нагрузок**

Первая попытка решения задачи (1) – (2) для пространственно-развитых волн Лэмба зафиксирована в работе [13]. Много позже, в 1985 г., Свиридов Ю.Б. опубликовал работу [14], в которой он, манипулируя теоремами Бетти [15], построил формальные решения для компонентов тензора Грина. К сожалению, в работах [13, 14] не представлены расчетные соотношения, которые можно использовать в качестве базовых при построении математических моделей процессов контактного и бесконтактного (электромагнитного и лазерного) возбуждения радиально распространяющихся волн Лэмба.

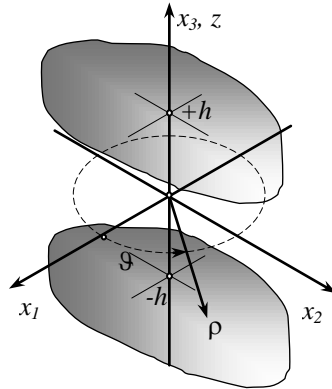


Рис. 1. Декартова и цилиндрическая системы координат

Для эффективного решения задачи (1) – (2) необходимо иметь в своем распоряжении соотношения, которые определяют свободные колебания материальных частиц пластины (нормальные волны), т. е. собственные функции (общие решения) задачи (1) – (2) при  $f^* = 0$  и  $\sigma_{ij}^* = 0$ . Полученная таким образом однородная граничная задача без особых проблем решается с помощью скалярного и векторного потенциалов [16]. Если ввести цилиндрическую систему координат, начало которой располагается в срединной плоскости изотропной пластины (рис. 1), то, следуя логике работы [17], получаем следующие соотношения для расчета компонентов вектора смещения материальных частиц:

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\
 u_{\vartheta}^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= -U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\
 u_z^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= 2U_z^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $m$  – номер нормальной волны, антисимметричной (символ  $A$ )

относительно срединной плоскости  $z=0$  пластины;  $U_{\beta}^A(z, \gamma_m)$  ( $\beta = \rho, z$ ) - собственные функции однородной граничной задачи (1) - (2), причем

$$U_{\rho}^A(z, \gamma_m) = \gamma_m \left[ \sin \alpha_m z + \frac{2\alpha_m \beta_m \cos \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h} \sin \beta_m z \right],$$

$$U_z^A(z, \gamma_m) = \alpha_m \left[ \cos \alpha_m z - \frac{2\gamma_m^2 \cos \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h} \cos \beta_m z \right], \quad (4)$$

$\alpha_m, \beta_m$  и  $\gamma_m$  - волновые числа, которые удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\Delta_A(\gamma_m) = 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \sin \beta_m h \cos \alpha_m h + (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos \beta_m h \sin \alpha_m h = 0. \quad (5)$$

Волновые числа  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  имеют смысл проекций волновых векторов невзаимодействующих волн сжатия-растяжения и сдвига, т. е.  $\alpha_m^2 + \gamma_m^2 = k_{\ell}^2$  и  $\beta_m^2 + \gamma_m^2 = k_s^2$ , где  $k_{\ell}^2 = \omega^2 \rho_0 / (\lambda + 2G)$  и  $k_s^2 = \omega^2 \rho_0 / G$ ;  $H_v^{(2)}(\gamma_m \rho)$  - функции Ханкеля второго рода. Выбор функций Ханкеля обусловлен принятой зависимостью от времени  $e^{i\omega t}$ . Константа  $B_n^*(\gamma_m)$  имеет смысл амплитудного множителя  $m$ -ой антисимметричной волны Лэмба и определяется в результате решения граничной задачи (1) - (2). Корни уравнения (5), которое имеет смысл условия существования антисимметричной волны Лэмба на данной частоте  $\omega$ , т. е. волновые числа  $\gamma_m$ , полностью определяют основные кинематические характеристики нормальной волны.

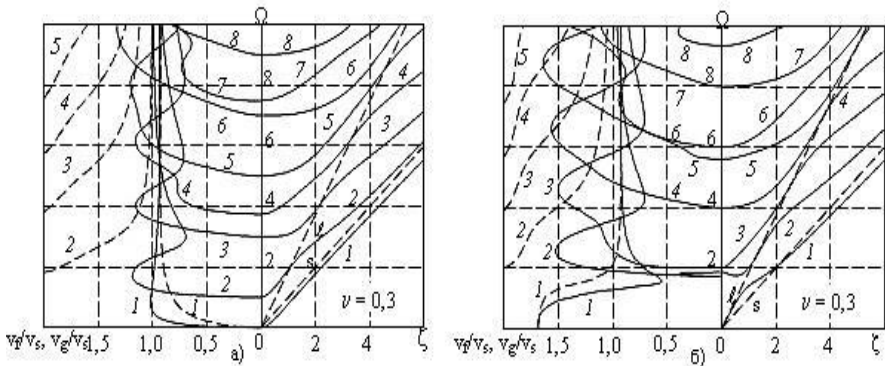


Рис. 2. Кинематические характеристики антисимметричных (а) и симметричных (б) волн Лэмба

На рис. 2,а показаны графики ветвей решений уравнения (5) (правая

полуплоскость рис. 2,а) и нормированные на величину  $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$  (скорость волн сдвига) фазовых  $v_f$  (штриховые кривые) и групповых  $v_g$  (сплошные кривые) скоростей (левая полуплоскость рис. 2,а). По оси ординат на рис. 2 откладывается безразмерная частота  $\Omega = 2k_s h/\pi$ , а по оси абсцисс, в правой полуплоскости рисунка – безразмерное волновое число  $\zeta = 2h\gamma/\pi$ . Тонкими штриховыми линиями в правой полуплоскости рис. 2,а показаны зависимости  $\zeta = \Omega$  (эта прямая обозначена малой латинской буквой  $s$ ) и  $\zeta = \Omega\sqrt{\xi}$  (прямая выделена символом  $\ell$ ), где  $\xi = (1 - 2\nu)/[2(1 - \nu)]$ ,  $\nu$  - коэффициент Пуассона. Прямые  $\ell$  и  $s$  определяют волновые числа невзаимодействующих продольных и сдвиговых волн. Номера нормальных волн проставлены возле кривых курсивом.

Для симметричных относительно срединной плоскости пластины (символ  $S$ ) волн Лэмба имеем расчетные соотношения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\ u_\vartheta^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= -U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\ u_z^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= 2U_z^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U_\rho^S(z, \gamma_m) &= \gamma_m \left[ \cos \alpha_m z + \frac{2\alpha_m \beta_m \sin \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h} \cos \beta_m z \right], \\ U_z^S(z, \gamma_m) &= -\alpha_m \left[ \sin \alpha_m z - \frac{2\gamma_m^2 \sin \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h} \sin \beta_m z \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$A_n^*(\gamma_m)$  - амплитудный множитель, определяемый в результате решения граничной задачи (1) – (2); волновые числа  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  удовлетворяют трансцендентному уравнению:

$$\Delta_S(\gamma_m) = (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin \beta_m h \cos \alpha_m h + 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \cos \beta_m h \sin \alpha_m h = 0. \quad (8)$$

Безразмерные волновые числа  $\zeta = 2h\gamma/\pi$  и нормированные на величину  $v_s$  фазовые и групповые скорости симметричных волн Лэмба показаны на рис. 2,б.

Граничная задача (1) – (2) в цилиндрической системе координат  $(\rho, \vartheta, z)$  (рис. 1) записывается следующим образом:

$$R(U_\rho) + R(U_\vartheta) + R(U_z) = f_\rho^{(n)}(\rho, z)/G \quad (9)$$

$$T(U_\rho) + T(U_\vartheta) + T(U_z) = f_\vartheta^{(n)}(\rho, z)/G, \quad (10)$$

$$Z(U_\rho) + Z(U_\vartheta) + Z(U_z) = f_z^{(n)}(\rho, z)/G, \quad (11)$$

$$(U_{\rho,z} + U_{z,\rho})\Big|_{z=\pm h} = \sigma_{z\rho}^{(n)}(\rho, \pm h)/G, \quad (12)$$

$$(U_{\vartheta,z} - nU_z/\rho)\Big|_{z=\pm h} = \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\rho, \pm h)/G, \quad (13)$$

$$\left[ \frac{k_s^2}{k_\ell^2} U_{z,z} + \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 2 \right) (U_{\rho,\rho} + U_\rho/\rho + nU_\vartheta/\rho) \right] \Big|_{z=\pm h} = \sigma_{zz}^{(n)}(\rho, \pm h)/G. \quad (14)$$

При записи соотношений (9) – (14) приняты следующие обозначения:

$$u_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}(\rho, \vartheta, z) = U_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}(\rho, z) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}; \quad u_\vartheta(\rho, \vartheta, z) = U_\vartheta(\rho, z) \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix};$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}^{(n)}(\rho, z) \\ \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} z\rho \\ zz \end{smallmatrix} \right\}}^{(n)}(\rho, \pm h) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} f_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}^*(\rho, \vartheta, z) \\ \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} z\rho \\ zz \end{smallmatrix} \right\}}^*(\rho, \vartheta, \pm h) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix} d\vartheta; \quad q = \begin{cases} 2n\pi & n=0, \\ 1 & \forall n \geq 1; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_\vartheta^{(n)}(\rho, z) \\ \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\rho, \pm h) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} f_\vartheta^*(\rho, \vartheta, z) \\ \sigma_{z\vartheta}^*(\rho, \vartheta, \pm h) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix} d\vartheta;$$

запятая между индексами означает операцию дифференцирования выражения, записанного до запятой, по координате, символ которой поставлен после запятой;

$$R(U_\rho) = \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left( U_{\rho,\rho\rho} + \frac{U_{\rho,\rho}}{\rho} - \frac{U_\rho}{\rho^2} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} U_\rho + U_{\rho,zz} + k_s^2 U_\rho;$$

$$R(U_\vartheta) = \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left( -\frac{n}{\rho^2} U_\vartheta + \frac{n}{\rho} U_{\vartheta,\rho} \right) - \left( \frac{n}{\rho^2} U_\vartheta + \frac{n}{\rho} U_{\vartheta,\rho} \right);$$

$$R(U_z) = \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) U_{z,\rho z};$$

$$T(U_\rho) = - \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} + 1 \right) \left( \frac{n}{\rho} U_{\rho,\rho} + \frac{n}{\rho^2} U_\rho \right) + \frac{2n}{\rho} U_{\rho,\rho}; \quad T(U_z) = - \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{n}{\rho} U_{z,z};$$

$$T(U_9) = U_{9,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{9,\rho} - \frac{1}{\rho^2}U_9 + U_{9,zz} - \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{n^2}{\rho^2}U_9 + k_s^2U_9;$$

$$Z(U_\rho) = \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \left( U_{\rho,\rho z} + \frac{U_{\rho,z}}{\rho} \right);$$

$$Z(U_9) = \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{n}{\rho} U_{9,z};$$

$$Z(U_z) = U_{z,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}U_{z,\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}U_z + \frac{k_s^2}{k_\ell^2}U_{z,zz} + k_s^2U_z.$$

Систему дифференциальных уравнений в частных производных (9) – (11) будем решать с помощью интегрального преобразования Ханкеля [18]. Введем прямое и обратное преобразование Ханкеля для компонента  $U_z(\rho, z)$  следующими соотношениями:

$$U_z(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho U_z(\rho, z) J_n(\gamma\rho) d\rho, \quad (15)$$

$$U_z(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma U_z(\gamma, z) J_n(\gamma\rho) d\gamma, \quad (16)$$

где  $J_n(\gamma\rho)$  - функция Бесселя порядка  $n$ ;  $\gamma$  - параметр интегрального преобразования, имеющий размерность волнового числа.

Воздействуя преобразованием (15) на левую и правую части уравнения (11), приводим его к следующему виду:

$$\frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{d^2 U_z(\gamma, z)}{dz^2} + \beta^2 U_z(\gamma, z) + \gamma \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{dU_0(\gamma, z)}{dz} = f_z^{(n)}(\gamma, z)/G, \quad (17)$$

где  $\beta^2 = k_s^2 - \gamma^2$ ;  $U_0(\gamma, z) = U_9(\gamma, z) - U_\rho(\gamma, z)$ ;

$$U_\rho(\gamma, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_\rho(\rho, z) [J_{n-1}(\gamma\rho) - J_{n+1}(\gamma\rho)] d\rho, \quad (18)$$

$$U_9(\gamma, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_9(\rho, z) [J_{n-1}(\gamma\rho) + J_{n+1}(\gamma\rho)] d\rho, \quad (19)$$

$$f_z^{(n)}(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho f_z^{(n)}(\rho, z) J_n(\gamma\rho) d\rho. \quad (20)$$

Очевидно, что интегральным образом  $U_\rho(\gamma, z)$  и  $U_9(\gamma, z)$ , полученных линейной комбинацией прямых интегральных преобразований Ханкеля, можно поставить в соответствие оригиналы, т. е.

$$U_{\left\{\begin{smallmatrix} \rho \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right\}}(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \gamma U_{\left\{\begin{smallmatrix} \rho \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right\}}(\gamma, z) [J_{n-1}(\gamma\rho) \mp J_{n+1}(\gamma\rho)] d\gamma. \quad (21)$$

Воздействуя преобразованием (15) на левую и правую части граничного условия (14), получаем

$$\left[ \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{dU_z(\gamma, z)}{dz} + \gamma \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 2 \right) U_0(\gamma, z) \right]_{z=\pm h} = \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma, \pm h) / G. \quad (22)$$

Конструкция соотношений (17) и (22) содержит один и тот же элемент  $U_0(\gamma, z)$  и это является фактически прямым указанием на порядок выполнения дальнейших вычислений. Воздействуем интегральным преобразованием (18) на левые и правые части соотношений (9) и (12). Воздействуем интегральным преобразованием (19) на левые и правые части уравнений (10) и (13). Из трансформированных уравнений (10) и (13) вычтем результаты преобразований уравнений (9) и (12). После выполнения этих вычислений получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 U_0(\gamma, z)}{dz^2} + \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} U_0(\gamma, z) - \gamma \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{dU_z(\gamma, z)}{dz} = f_0^{(n)}(\gamma, z) / G \quad (23)$$

и обеспечивающее единственность его решения граничное условие

$$\left[ \frac{dU_0(\gamma, z)}{dz} - \gamma U_z(\gamma, z) \right]_{z=\pm h} = \sigma_0^{(n)}(\gamma, \pm h) / G. \quad (24)$$

При записи выражений (23) и (24) приняты следующие обозначения:

$$\alpha^2 = k_\ell^2 - \gamma^2; \quad f_0^{(n)}(\gamma, z) = f_\vartheta^{(n)}(\gamma, z) - f_\rho^{(n)}(\gamma, z);$$

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma, \pm h) = \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\gamma, \pm h) - \sigma_{z\rho}^{(n)}(\gamma, \pm h);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\left\{\begin{smallmatrix} \rho \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right\}}^{(n)}(\gamma, z) \\ \sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} z\rho \\ z\vartheta \end{smallmatrix}\right\}}^{(n)}(\gamma, \pm h) \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} \rho \left\{ \begin{array}{l} f_{\left\{\begin{smallmatrix} \rho \\ \vartheta \end{smallmatrix}\right\}}^{(n)}(\rho, z) \\ \sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} z\rho \\ z\vartheta \end{smallmatrix}\right\}}^{(n)}(\rho, \pm h) \end{array} \right\} [J_{n-1}(\gamma\rho) \mp J_{n+1}(\gamma\rho)] d\rho.$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17), (23) выполняется по стандартной процедуре варьируемых множителей Лагранжа. Входящие в состав общих решений константы определяются из четырех граничных условий (22) и (24). При выполнении обратных интегральных преобразований было установлено, что соотношения для расчета одной группы констант содержат в себе особенности типа простых полюсов при значениях параметра интегрального преобразования  $\gamma$  равных волновым числам распространяющихся на данной частоте симметричных волн Лэмба. Для второй группы констант в расчетных соотношениях



содержатся простые полюса при значении параметра  $\gamma$  равных волновым числам распространяющихся антисимметричных волн Лэмба. После определения вычетов в точках  $\gamma = \gamma_m$  необходимо принять во внимание, что функция Бесселя  $J_\nu(\gamma_m \rho) = [H_\nu^{(1)}(\gamma_m \rho) + H_\nu^{(2)}(\gamma_m \rho)]/2$ , т. е. представляет собой комбинацию цилиндрических волн приходящих из бесконечности (функция Ханкеля  $H_\nu^{(1)}(\gamma_m \rho)$ ) и уходящих от источника – функция Ханкеля  $H_\nu^{(2)}(\gamma_m \rho)$ . Отбрасывая не соответствующие физическому смыслу решаемой задачи функции Ханкеля первого рода, можно записать следующие общее решение граничной задачи (1) – (2) в следующем виде:

$$u_\beta(\rho, \vartheta, z) = \sum_{m=1}^{M_{SL}} u_\beta^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) + \sum_{m=1}^{M_{AL}} u_\beta^{(Am)}(\rho, \vartheta, z), \quad (\beta \Leftrightarrow \rho, \vartheta, z),$$

где  $M_{SL}$  и  $M_{AL}$  - число распространяющихся на данной частоте симметричных и антисимметричных волн Лэмба соответственно;

$u_\beta^{\left\{ \begin{smallmatrix} Sm \\ Am \end{smallmatrix} \right\}}(\rho, \vartheta, z)$  - компонент вектора смещения в  $m$ -ой распространяющейся симметричной ( $Sm$ ) и антисимметричной ( $Am$ ) волне Лэмба. Расчет модальных составляющих  $u_\beta^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z)$  и  $u_\beta^{(Am)}(\rho, \vartheta, z)$  волнового поля выполняется по следующим формулам:

а) симметричные волны Лэмба:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= \frac{1}{4} U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) [H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho)] \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\ u_\vartheta^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= -\frac{1}{4} U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) [H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho)] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\ u_z^{(Sm)}(\rho, \vartheta, z) &= \frac{1}{2} U_z^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} A_n^*(\gamma_m) &= \frac{\pi i}{2G\Delta'_S(\chi_m)} \left\{ -\frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \sin \alpha_m h} \int_{-h}^h \mathbf{f}^{(n)}(\gamma_m, z) \cdot \mathbf{U}^S(z, \gamma_m) dz + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_m \beta_m [\sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\gamma_m, h) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{z\rho}^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\gamma_m, -h) + \sigma_{z\rho}^{(n)}(\gamma_m, -h)] \cos \beta_m h + (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times [\sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, -h)] \sin \beta_m h \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$\chi_m \equiv \gamma_m^2$ ;  $\Delta'_S(\chi_m) = d\Delta_S(\gamma_m)/d\chi_m$ ; величина  $\Delta_S(\gamma_m)$  определена выражением (8);

б) антисимметричные волны Лэмба:

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= \frac{1}{4} U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\
 u_{\vartheta}^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= -\frac{1}{4} U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}, \\
 u_z^{(Am)}(\rho, \vartheta, z) &= \frac{1}{2} U_z^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_n^*(\gamma_m) &= \frac{\pi i}{2G\Delta'_A(\chi_m)} \left\{ \frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \cos \alpha_m h} \int_{-h}^h \mathbf{f}^{(n)}(\gamma_m, z) \cdot \mathbf{U}^A(z, \gamma_m) dz - \right. \\
 &2\gamma_m \beta_m \left[ \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_{z\vartheta}^{(n)}(\gamma_m, -h) + \sigma_{z\rho}^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_{z\rho}^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] \sin \beta_m h + \\
 &\left. + (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \times \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] \cos \beta_m h \right\}; \quad (28)
 \end{aligned}$$

$\chi_m \equiv \gamma_m^2$ ;  $\Delta'_A(\chi_m) = d\Delta_A(\gamma_m)/d\chi_m$ ; величина  $\Delta_A(\gamma_m)$  определена выражением (5).

В случае осесимметричного источника внешних сил ( $n=0$ ) окружные компоненты вектора смещения материальных частиц обращаются в нуль, а для радиальных и аксиальных компонентов получаем следующие расчетные соотношения:

а) симметричные осесимметричные волны Лэмба:

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{(Sm)}(\rho, z) &= -\frac{1}{2} U_{\rho}^S(z, \gamma_m) A_0^*(\gamma_m) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\
 u_z^{(Sm)}(\rho, z) &= \frac{1}{2} U_z^S(z, \gamma_m) A_0^*(\gamma_m) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_0^*(\gamma_m) &= \frac{\pi i}{2G\Delta'_S(\chi_m)} \left\{ -\frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \sin \alpha_m h} \int_0^h \int_{\rho} [f_{\rho}^{(0)}(\rho, z) U_{\rho}^S(z, \gamma_m) J_1(\gamma_m \rho) + \right. \\
 &+ f_z^{(0)}(\rho, z) U_z^S(z, \gamma_m) J_0(\gamma_m \rho)] dz d\rho + \\
 &+ 2\beta_m \gamma_m \cos \beta_m h \int_0^{\infty} \rho \left[ \sigma_{z\rho}^{(0)}(\rho, h) - \sigma_{z\rho}^{(0)}(\rho, -h) \right] J_1(\gamma_m \rho) d\rho + \\
 &\left. + (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h \int_0^{\infty} \rho \left[ \sigma_{zz}^{(0)}(\rho, h) + \sigma_{zz}^{(0)}(\rho, -h) \right] J_0(\gamma_m \rho) d\rho \right\}; \quad (30)
 \end{aligned}$$

б) антисимметричные осесимметричные волны Лэмба:

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(Am)}(\rho, z) &= \frac{1}{2} U_{\rho}^A(z, \gamma_m) B_0^*(\gamma_m) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\
u_z^{(Am)}(\rho, z) &= \frac{1}{2} U_z^A(z, \gamma_m) B_0^*(\gamma_m) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho),
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
B_0^*(\gamma_m) &= \frac{\pi i}{2G\Delta'_A(\chi_m)} \left\{ \frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \cos \alpha_m h} \int_0^h \int_0^h \rho [f_{\rho}^{(0)}(\rho, z) U_{\rho}^A(z, \gamma_m) J_1(\gamma_m \rho) + \right. \\
&\quad \left. + f_z^{(0)}(\rho, z) U_z^A(z, \gamma_m) J_0(\gamma_m \rho)] dz d\rho - \right. \\
&\quad \left. - 2\beta_m \gamma_m \sin \beta_m h \int_0^{\infty} \rho [\sigma_{z\rho}^{(0)}(\rho, h) + \sigma_{z\rho}^{(0)}(\rho, -h)] J_1(\gamma_m \rho) d\rho + \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h \int_0^{\infty} \rho [\sigma_{zz}^{(0)}(\rho, h) - \sigma_{zz}^{(0)}(\rho, -h)] J_0(\gamma_m \rho) d\rho \right\}. \tag{32}
\end{aligned}$$

Соотношения (29) – (32) полностью совпадают с ранее полученными результатами [19] решения задачи о возбуждении волн Лэмба осесимметричными распределениями объемных и поверхностных внешних сил.

В работе [20] представлены результаты решения модельной задачи о возбуждении осесимметрично распространяющихся симметричных волн Лэмба линейным пульсирующим источником. Источник ориентирован вдоль оси  $Oz$  и располагается в окрестности точки  $\rho = 0$  цилиндрической системы координат. Радиус поперечного сечения источника стремится к нулю. Источник генерирует радиальные смещения материальных частиц упругой среды за счет формирования на своей боковой поверхности радиального компонента вектора объемной плотности сил. В принятом в настоящем изложении обозначениях это величина  $f_{\rho}^{(0)}(\rho, z)$ . При этом  $f_{\rho}^{(0)}(\rho, z) = const$ . Такая постановка задачи представляет собой пространственно развитую версию плоской модельной задачи Петера Торвика [21], который рассматривал возбуждение волн Лэмба продольными силами, заданными на торце изотропной полубесконечной полосы. В работе [20] смещения материальных частиц определялись по формулам (29) и (30), после чего анализировались потоки мощности, которые уносятся от источника в периферийные области пластины распространяющимися симметричными модами Лэмба. Поток мощности  $P_{\rho}(\omega)$  вдоль радиальной оси  $\rho$  рассчитывался по стандартной методике [16] следующим образом

$$P_p(\omega) = \frac{i\pi\omega}{2} \rho \int_{-h}^h (\sigma_{\rho\rho} u_\rho^* - \sigma_{\rho\rho}^* u_\rho + \sigma_{\rho z} u_z^* - \sigma_{\rho z}^* u_z) dz,$$

где  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\rho z}$  - нормальные и касательные напряжения;  $u_\rho$  и  $u_z$  - радиальный и аксиальный компоненты вектора смещения материальных частиц, определенные выражениями (29); звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины.

Как и следовало ожидать, максимальные значения потока мощности, уносимые распространяющейся волной Лэмба, наблюдаются в том диапазоне частот, где радиальные смещения  $u_\rho^{(Sm)}(\rho, z)$   $m$ -ой распространяющейся волны Лэмба максимально похожи на радиальные смещения во фронте плоской цилиндрической волны сжатия-растяжения, которая распространяется со скоростью  $v_\ell$ . Этому соответствуют участки ветвей частотного спектра волновых чисел, которые расположены в непосредственной близости к прямой, которая на рис. 2 обозначена символом  $\ell$ .

На рис. 3, в левой полуплоскости рисунка, показаны графики частотно-зависимого изменения потоков мощности, которые уносятся от пульсирующего линейного источника с бесконечно малым радиусом полости  $R_0$  распространяющимися симметричными волнами Лэмба. По горизонтальной оси левой полуплоскости рис. 3 отложены значения нормированного потока  $\hat{P}_p(\omega) = P_p(\omega)/P_0$ , где  $P_0 = (\pi F_0)^2 / (32\rho_0 v_s h^2)$ ,  $F_0$  - амплитуда радиально ориентированной силы. По вертикальной оси отложены числовые значения безразмерной частоты  $\Omega = 2k_s h / \pi$ . В правой полуплоскости рис. 3 показаны ветви действительных корней дисперсионного уравнения  $\Delta_S(\gamma_m) = 0$  симметричных волн Лэмба. По горизонтальной оси правой полуплоскости рис. 3 отложены значения безразмерного волнового числа  $\zeta = 2\gamma h / \pi$ . Отчетливо видно, что каждая распространяющаяся волна в определенном диапазоне частот переносит наибольшее, по сравнению с другими распространяющимися волнами, количество энергии. Соответствующий этому частотному диапазону участок ветви действительных волновых чисел выделен полужирной кривой. Нетрудно заметить, что волновые числа доминирующих по уровню переносимой энергии симметричных волн сгруппированы в ближайшей окрестности прямой  $\Omega = k_s \zeta / k_\ell$ . Именно в этом диапазоне волновые числа  $\gamma_m \approx k_\ell$  и аксиальный компонент вектора смещения материальных частиц пластины  $u_z^{SL}(\rho, z) \approx 0$ . При этом радиальный компонент  $u_\rho^{SL}(\rho, z) \neq 0$  и практически не изменяется по толщине пластины. Подобная кинематика собственных форм волновых движений в пластине наилучшим образом

соответствует типу движения, которое навязывается материальным частицам пластины пульсирующим линейным источником. Это соответствие является необходимым условием для максимально возможного отбора ультразвуковой волной энергии от источника упругих возмущений. Точно к такому же выводу пришел П. Торвик в своей работе [21], рисунок из которой показан на врезке в поле правой полуплоскости рис. 3.

Полное совпадение результатов расчетов модальных потоков мощности, которые были получены на различных математических моделях одного и того же физического процесса, свидетельствует о достоверности и физической содержательности соотношений (29) и (30), которые являются частным случаем более общих аналитических конструкций. Из этого следует вывод: общее решение граничной задачи (1), (2), определенное соотношениями (25) – (28), является достоверным, т. е. не содержит ошибок вычислительного плана и не противоречит принципам и основным положениям математической физики и теории упругости.

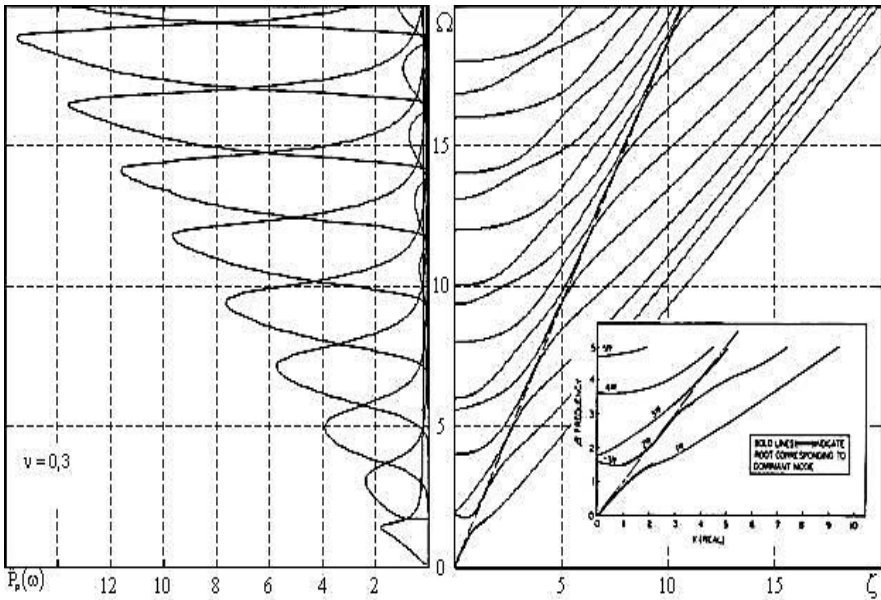


Рис. 3. Поток мощности, уносимый распространяющимися симметричными волнами Лэмба от линейного пульсирующего источника [20]

**Выводы.** Впервые решена в трехмерной постановке задача о возбуждении волн Лэмба системой внешних сил, которые произвольным образом распределены в объеме и на поверхности некоторой ограниченной области изотропной пластины. Путем сравнения результатов решения тестовой задачи с известными результатами П. Торвика была доказана достоверность полученных решений.

- Список литературы:** 1. Сучков Г.М. Современные возможности ЭМА дефектоскопии // Дефектоскопия. – 2005. - №12. - С. 24 - 39. 2. Schlawne F., Graff A., Scheider H. Use of EMATs for Inspection of Tubes and Pipes // NDT.net. – 2003. – Vol. 8. - №3. 3. Hutchins D.A., Hu J.K., Young R.P., Stoner R., Jansen D., Zhang Q.L. Ultrasonic tomography of metals using noncontact transduction // J. Acoust. Soc. Am. – 1989. – Vol.85. - №2 – P. 747 – 752. 4. Light G., Kwun H., Kim S., Spinks R. Health Monitoring of Piping and Plate using the Magnetostrictive Sensor (McS) Guided Wave Technology //NDT.net. – 2004. – Vol.9. - №2. 5. Elshaftey I., Udra L. A New Eddy Current Imaging System for Enhancement of Nondestructive Evaluation // NDT.net. – 2004. – Vol.9. - №9. 6. Ogi H., Ledbetter H., Kim S., Hirao M. Contactless mode-selective resonance spectroscopy: Electromagnetic acoustic resonance // J. Acoust. Soc. Am. – 1999. – Vol.106. - №2 – P. 666 – 665. 7. Tian J., Ogi H., Tada T., Hirao M. Vibration analysis on electromagnetic-resonance-ultrasound microscopy (ERUM) for determining localized elastic constants of solids // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – Vol. 115. - №2 – P. 630 – 636. 8. Петрищев О. Н., Шпиль А. П. Ультразвуковые магнитострикционные волноводные системы: Монография – К.: Изд-во при Киевском ун-те, 1989. – 132 с. 9. Zemanek J. (Jr.) An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – Vol. 51. - №1. – Pt. 2. – P. 265 – 289. 10. Петрищев О. Н. Принципы построения математических моделей ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа в режиме возбуждения упругих волн // Электроника и связь. – 2005. - №25. – С. 50 – 61. 11. Петрищев О.Н. Возбуждение волн Рэлея в металлической полосе, поляризованной постоянным магнитным полем // Акуст. вісн. – 2005. – Т. 8. - №1 - 2. - С. 85 – 95. 12. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с. 13. Вовк А. Е., Тютюкин В. В. Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении. // Труды Акуст. ин – та. – 1969. – Вып. 9. – С. 5 – 26. 14. Свиридов Ю. Б. О построении динамического тензора Грина для твердого слоя // Акуст. журн. – 1985. – Т. 31. - №2. – С. 246 – 254. 15. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с. 16. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 283 с. 17. Pardee W. J. Radially propagating surface and plate waves // J. Acoust. Soc. Amer. – 1982. – Vol. 71. - №1. – P. 1 – 4. 18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с. 19. Петрищев О.Н. Электромагнитное возбуждение в металлических листах радиально распространяющихся волн Лэмба. Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – Київ: Наукова думка, 2007. - С. 259 – 273. 20. Петрищев О.Н., Трушко Н.С. Возбуждение радиально распространяющихся волн Лэмба линейными и точечными пульсирующими источниками. Акустический симпозиум “Консонанс - 2009”. Сборник трудов. - Киев: НАН Украины. Институт гидромеханики. - 2009. - С. 273 – 279. 21. Torvik P. J., McClatchey J. J. Response of an Elastic Plate to a Cyclic Longitudinal Force // J. Acoust. Soc. Amer. – 1968. – Vol. 44. - №1. – P. 59 – 64.

Надійшла до редакції 15.04.12